繰り下がりのある一桁ひき算の過程モデルに関する実験的研究

An experimental test of process models for simple subtraction with carrying down procedure

後藤　聡
So GOTO

The purpose of this study is to test process models for simple subtraction with carrying down experimentally. The subjects of this test were seventy seven children of the second grade. They solved thirty six subtraction problems with carrying down of the form m-n on a personal computer, where m are integers between 11 and 18, n are integers between 2 and 9, after which I measured their response time. Equation 1 then holds, with the structural variable x determined as follows: Model 1. $x=m+n$, Model 2. $x=n$, Model 3. $x=m-n$, Model 4. $x=n+(m-n)=m$, Model 5. $x=\min(n, m-n)$. Each model is fitted to the response time by means of a linear regression. A series of regression analyses showed that F values are significant in Model 2 and 3.

Key words：simple subtraction
carrying down
mental model
response time

天使大学 看護栄養学部 教養教育科

問題と目的

ひき算研究の歴史は半世紀以上遡り、被減数18以下、減数9以下の組み合わせにより答が一桁になるひき算（以下、一桁ひき算と称する。）から始まった。Smith[1]は問題が提示されてから回答するまでの時間（以下、反応時間と称する。）を基準に全ての一桁ひき算問題を序列し、問題の難易水準を3つに想定した。Washburne & Vogel[2]も難易差により問題の分類を試み、先行研究との比較検討を行っている。これらに先駆者としての功績は認められるものの、反応時間の相対的な大小差のみを基準に単純に序列し、機械的な分類を行っている点に疑問が残る。後に難易は計算方略との関わりで検討されるに至っている(Baroody[3)・4)])。

認知心理学の台頭により内的な処理過程に視点が当てられるようになった。Gibb[5]は計算過程の思考分析を行った。Groen & Poll[6]、Woods, Resnick & Groen[7]は繰り下がりのない一桁ひき算の解答過程モデルを複数想定し、測定した反応時間に適合しているモデルを実験的に分析した。

また、Svenson[8]、西谷[9)・10)]、Fuson[11]、Thornton & Smith[12]、Thornton[13]は、子どもが如何なる計算方略を獲得しているかについて探り、数え足し、数え引き、減加法、減減法など、多彩なストラテジーが存在すること、その使用割合、発達的変化などを明らかにした。Fuson[14)・15)]、Fuson & Willis[16]は何を教授すべきかという観点から計算方略を検討している。

一桁ひき算は、最も基礎的なひき算であるため、早期から長年に渡って様々な視点で取り組まれてきたが、計算の内的処理過程を表した解答過程モデルに限ってみれば、繰り下がりのある問題においては見当たらない。そこで、本研究では、その手始めとして、繰り下がりのある問題が Woods, Resnick & Groen[17]のモデルに適合されるか実験的に検討することを目的とする。

彼らは、繰り下がりのない一桁ひき算の処理過程を認知的な整数カウンタの増減と仮定し、m－nの形態で表現されるひき算は以下の何れかの方法で処理されると考えた。

1. カウンタを0にセットする。次に、カウンタをm回増加させ、更にn回減少させる。カウンタの示す値が答となる。
2. カウンタをmにセットし、n回減少させる。カウンタの示す値が答となる。
3. カウンタをnにセットし、mに到達するまで（m－n）回増加させる。増加させた数が答となる。
4. カウンタを0にセットする。次に、n回増加させ、更にmに到達するまで（m－n）回増加させる。nに達した後に増加させた数が答となる。
5. 上記2、または3の内、操作回数の少ない方が選択される。

更に、1～5の方法により増減させたカウンタの回数（x）を順次以下の数式にモデル化し、回帰分析を行なった結果、Model 2、5が適合している割合が高いことを見出した。

Model 1.　$x = m + n$
Model 2.　$x = n$
Model 3.　$x = m - n$
Model 4.　$x = n + (m - n) = m$
Model 5.　$x = \min(n,\ m - n)$

本研究においては、これらのモデルに繰り下がりのある一桁ひき算の反応時間を当てはめ、どのモデルが適合するかを検討する。

方　法

1. 被験者

小学校2年生77名。

2. 材料

被減数11～18、減数2～9の組み合わせによる繰り下がりのあるひき算問題、計36問を用いた。Parkman[18]などでは再認課題が用いられた。しかし、本研究では、日常生活での自然な場面に近い再生課題を用いた。

3. 装置

問題の提示と測定した反応時間の記録にはパーソナル・コンピュータを使用した。ディスプレイの中央に横68mm×縦22mmの長方形を描き、問題はその中に（m－n）の形で水平に提示した。被験者からディスプレイまでは、被験者の見やすい距離（15～50cm）を選択させた。

4. 手続き

実験に先立ち、被験者全員に次の事項を教示した。

① この実験はひき算の難しさを調べるために行うこと。
② 答えるまでの時間を調べるからできるだけ速く答えること。
③ 実験は一人ずつ行うこと。
④ 答が分かったらその答を速やかに言うこと。
⑤ 答は実験者がコンピュータに入力すること。
⑥ 間違っても気にしないで次の問題を行うこと。
⑦ 答が分からないときは、「分からない」と言うこと。
⑧ 個人の記録が人に知らされることはないこと。

実験は被験者の学校の隔離された部屋で個別に実施された。実験者は被験者を装置の前に座らせてから軽い会話により被験者の緊張を取り除き、その後実験が実施された。

コンピュータの操作は実験者によって行われた。実験者の合図の後、実験者の操作によりディスプレイ上に問題が提示され、被験者が回答するまで提示されたままであった。実験者は被験者が回答を開始したと同時にキーボードの一定のキーを押し、ディスプレイ上から問題を消した。コンピュータには、問題が提示されてから実験者が一定のキーを押すまでの時間を測定させて自動的に記録させた。実験者は、実験に先立ち充分に練習を重ね、習熟してから実験に臨んだ。更に、実験者は被験者の回答内容をキーボードから入力した。

なお、問題の提示順は被験者ごとにランダムであった。

結　果

Parkman[19]によると、反応時間測定の手続きには次の4段階があるとされている。
① 刺激を与える段階
② 計算する段階
③ 口頭する段階
④ 実験者が反応する段階

①については使用したコンピュータにより同一時間で統制されている。③については口頭の速度に個人差はありうるが、それは個人内で一定の傾向と考えられ、全ての被験者は全36問に回答しているため歪んだ結果をもたらすとは考えられない。④については、実験者は充分な練習により操作が習熟しているが、仮に反応ごとに微妙な誤差が生じたとしても、被験者の数によって相殺されると考えられる。

従って、測定した時間の差は②の時間差のみを表していると考えられ、本研究での測定時間は計算に要した時間の差を示す反応時間と見なす。

全問題における平均反応時間は4146msec、標準偏差は2828msecであった。個人差が大きかったため、分析に際しては元のデータの常用対数変換値を用いることにした。なお、表、図については実測値を用いた。

問題別に全被験者の平均反応時間、標準偏差を算出し、表1に示した。

表1の反応時間を用い、各々のモデルについて単回帰分析を行った結果が表2である。Model 2のF値は1％水準、Model 3は5％水準で有意であった。これらの散布図に回帰直線を当てはめたのが図1、2である。

考　察

表1から、Model 2の結果は、Woodsら[20]と同様に有意であった。回帰直線の傾きもほぼ一致している。これは、カウンタを被減数にセットし、減数分を減少させるモデルであるため、西谷[21)・22]では数え引き、Thornton[23]ではcount backに相当するストラテジーが用いられたと考えることが可能である。例えば、12−5では、12をセットし、11、10、9、8、7と5つ減少させることによって答の7を得ることになる。

しかし、Woodsら[24]と本研究では実験材料に差異がある。本研究では、繰り下がりのある一桁ひき算を扱ったため、より複雑な処理過程も想定される。西谷[25)・26]で見られる減減法がそれである。12−5であれば、減数から被減数の1の位の数を引いて5−2＝3とし、被減数の残り10から先に求めた3を引いて10−3＝7として答の7を得る方法である。この過程について、被減数m、減数nを用いて表現すると、まず（n−(m−10)）を行い、次に（10−(n−(m−10))）を行うことになる。この両方の処理に数え引きのストラテジーを用いていると仮定して、Woodsら[27]が仮定したカウンタの増減回数をモデル化すると、カウンタを先に（m−10）回減少させ、次に（n−(m−10)）回減少させることになるため、カウンタの操作回数は(m−10)＋(n−(m−10))＝n回になり、Model 2と一致する。本研究の結果から

表1　問題別の平均反応時間・標準偏差

問 題	反応時間 (msec)	標準偏差 (msec)	問 題	反応時間 (msec)	標準偏差 (msec)	問 題	反応時間 (msec)	標準偏差 (msec)
11−2	3429	1944	12−7	3665	2222	14−8	4501	2789
11−3	3975	2155	12−8	4370	2768	14−9	4441	3642
11−4	4310	2945	12−9	5074	3699	15−6	2826	1587
11−5	4001	2574	13−4	3599	2689	15−7	5125	4730
11−6	4319	2908	13−5	3853	2139	15−8	4693	2776
11−7	3932	2475	13−6	4207	2707	15−9	4511	2504
11−8	4496	3599	13−7	4918	3056	16−7	3574	2800
11−9	3679	2036	13−8	3875	2300	16−8	5076	3017
12−3	2968	1398	13−9	4010	2071	16−9	4902	3123
12−4	4189	2936	14−5	3062	2129	17−8	3941	2824
12−5	4150	2982	14−6	4493	2948	17−9	5141	3395
12−6	4018	2549	14−7	4577	3105	18−9	3357	1973

表2　回帰分析の結果

Model	傾 き	切 片	r	r^2	自由度	F 値
1	0.005	3.435	0.307	0.094	1, 34	3.531
2	0.014	3.454	0.439	0.192	1, 34	8.101 **
3	−0.011	3.616	0.346	0.120	1, 34	4.624 *
4	0.003	3.506	0.093	0.009	1, 34	0.294
5	0.009	3.500	0.239	0.057	1, 34	2.055

** $p<0.01$　* $p<0.05$

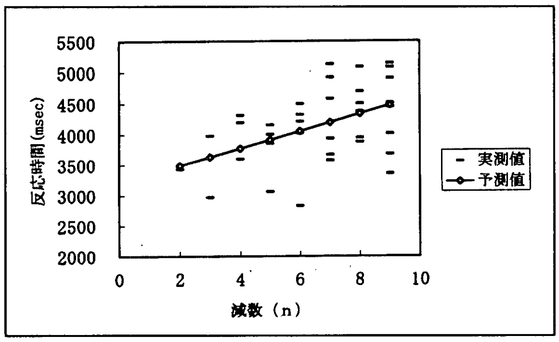

図1　Model 2 の反応時間の散布図と回帰直線

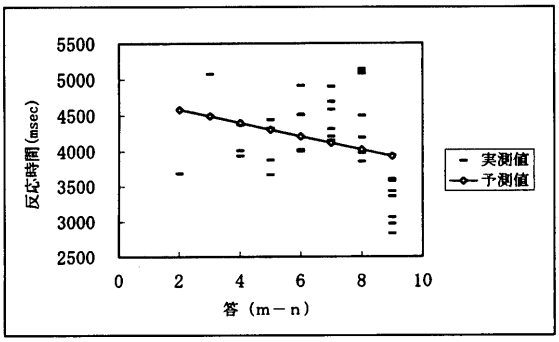

図2　Model 3 の反応時間の散布図と回帰直線

は、被減数から減数分を単純に数え引きしたのか、減減法において数え引きを2度繰り返す過程を経たのかは明らかにできないが、Model 2 が適合したのは減減法の使用が要因とも考えられる。事実、西谷[28),29)]では、減減法は2番目に多く被験者が使用したストラテジーとなっている。

一方、Model 3 の結果も有意であった。これは、カウンタを減数にセットし、(被減数−減数)分を増加させるモデルであるため、西谷[30),31)]では数え足し、Thornton[32)]では count up に相当するストラテジーが用いられたと思われる。例えば、12−5では、5をセットし、6、7、8、9、10、11、12と7つ増加させることによって答の7を得ることになる。

しかし、これもより複雑な処理過程が想定される。西谷[33),34)]で見られる減加法がそれである。12−5であれば、被減数の内の10から減数を引いて10−5＝5とし、被減数の残り2を加えて5＋2＝7として答の7を得る方法である。先と同様に被減数m、減数nを用いて表現すると、まず(10−n)を行い、次に((10−n)＋(m−10))を行うことになる。この両方の処理に数え足しのストラテジーを用いていると仮定して、カウンタの増減回数をモデル化すると、カウンタを先に(10−n)回増加させ、次に(m−10)回増加させることになるため、カウンタの操作回数は(10−n)＋(m−10)＝(m−n)回になり、Model 3 と一致する。やはり、本研究の結果からは、減数から被減数になるまで単純に数え足しを行ったのか、減加法において数え足しを2度繰り返す過程を経たのかは明らかにできないが、Model 3 が適合したのは減加法の使用が要因とも考えられる。事実、西谷[35),36)]では、減加法は最も多く被験者が使用したストラテジーとなって

いる。

今後の課題

前述した減加法では、数え足しを２度繰り返す以外に、数え引き、数え足しの過程を経るモデル、Woods ら[37]の結果に見られたように、数え足しと数え引きで操作回数の少ない方を選択するモデルも可能である。減減法でも同様である。繰り下がりのある一桁ひき算は、繰り下がりのない一桁ひき算と比較して処理過程が複雑であるため、より多くのモデルを仮定し、分析することが必要となる。また、個人差の検討についても今後の課題である。

本研究は、平成12年度科学研究費補助金（基盤研究(C)(2)）（課題番号10680292）「整数四則演算の難易構造の検討、及び教材、教授支援システムの開発」の助成を受けて行われた。

引用文献

1）Smith, J. H.: Arithmetical combinations, Elementary School Journal, 21, 762-770, 1921.

2）Washburn, C., & Vogel, M.: Are any number combination inherently difficult?, Journal of Educational Research, 17(4), 235-255, 1928.

3）Baroody, A. J.: Children's difficulties in subtraction: Some causes and cures, Arithmetic Teacher, 32(3), 14-19, 1984a.

4）Baroody, A. J.: Children's difficulties in subtraction: Some causes and questions, Journal for Research in Mathematics Education, 15(3), 203-213, 1984b.

5）Gibb, E. G.: Children's thinking in the process of subtraction, Journal of Experimental Education, 25, 71-80, 1956.

6）Groen, G. J. & Poll, M.: Subtraction and the solution of open sentence problems, Journal of Experimental Child Psychology, 16, 292-302, 1973.

7）Woods, S. S., Resnick, L. B., & Groen, G. J.: An experimental test of five process models for subtraction, Journal of Educationl Psychology, 67(1), 17-21, 1975.

8）Svenson, O., & Hedenborg, M. L.: Strategies used by children when solving simple subtractions, Acta Psychologica, 43, 477-489, 1979.

9）西谷さやか：減法計算の Strategy の分析Ⅱ、日本教育心理学会第31回総会発表論文集、9、1989.

10）西谷さやか：減法計算の Strategy の分析Ⅲ、成人と児童の比較、日本教育心理学会第 32回総会発表論文集、23、1990.

11）Fuson, K. C.: Research into practice: Subtracting by counting up with one-handed finger patterns, Arithmetic Teacher, 35(5), 29-31, 1988.

12）Thornton, C. A., & Smith, P. J.: Action research: Strategies for learning subtraction facts, Arithmetic Teacher, 35(8), 8-12, 1988.

13）Thornton, C. A.: Solution strategies: Subtraction number facts, Educational Studies in Mathematics, 21, 241-263, 1990.

14）Fuson, K. C.: More complexities in subtraction, Journal for Research in Mathematics Education, 15(3), 214-225, 1984.

15）Fuson, K. C.: Teaching children to subtract by counting up, Journal for Research in Mathematics Education, 17(3), 172-189, 1986.

16）Fuson, K. C., & Willis, G. B.: Subtracting by counting up: More evidence, Journal for Research in Mathematics Education, 19(5), 402-420, 1988.

17）前掲７）

18）Parkman, J. M.: Temporal aspects of simple multiplication and comparison, Journal of Experimental Psychology, 95(2), 437-444, 1972.

19）前掲18）

20）前掲７）

21）前掲９）

22）前掲10）

23）前掲13）

24）前掲７）

25）前掲９）

26）前掲10）

27）前掲７）

28）前掲９）

29）前掲10）

30）前掲９）

31）前掲10）

32）前掲13）

33）前掲９）

34）前掲10）

35）前掲９）
36）前掲10）
37）前掲７）