かけ算九九の数の表象構造

Representational Structure of Numbers in Mental Multiplication

後藤　聡
So GOTO

The purpose of this study was to investigate that number 5 was represented as a peculiar number and developmental differences can be seen about it in mental multiplication. The subjects of this investigation were thirty six children in the third grade and thirty two in the fourth. They answered one hundred questions on a personal computer, after which I measured and recorded their response times. The result shows number 5 was represented as the peculiar number in both grades.

Key words : mental multiplication
representational structure of numbers
developmental difference
arithmetic education
response time

天使大学 看護栄養学部 教養教育科
(2001年12月10日受稿、2002年1月16日審査終了受理)

Ⅰ　問題と目的

近年、子どもが数をどのように理解しているかについて、認知心理学的立場から様々な研究が行われている。その中で、本研究では、数の表象構造を問題とする。

数の表象については、様々な課題を用いて明らかにされてきた。Siegler & Robinson (1982) が幼児に数唱させてどこで数えられなくなるかを調べた結果、頻度の高いのは29、39、49であった。これは、幼児が10を特異数として表象していることを示すものである。Krueger & Hallford (1984) は、大人を対象とした実験により加数や被加数に10を含むたし算問題が10以外を含む問題よりも回答に要する時間（以下、反応時間と称する。）が小さいことを証明し、数表象の中で10を特異数として位置付けた。河井・後藤 (1987) は、小学校1・2年生を対象として一桁たし算の難易を検討する中で、答が10になる問題は10以外になる問題と比べて反応時間が小さく、10はたし算の計算を易しくする特異な数であることを指摘した。後藤 (1999a) では、小学校2年生の心的ひき算の被減数や答が10になる問題の反応時間が小さいことから、ひき算においても10が特異数として表象されていることの影響が見られることを示した。他に、幾つかの研究が数唱や一桁たし算などを課題として用い、10は十進法に基づいた特異な機能を果たす数として表象されていることを見出している (Ashcraft, 1982;Greeno, Riley & Gelman, 1984)。これらにより、幼児から大人に至るまで10が共通して特異数となっていること、数唱、たし算、ひき算の課題においてその影響を受けていることが明らかになった。

従来、数表象に関する研究では、幼児、児童とも10以下の数には特別な構造が存在しないと考えられてきた。例えば、Resnick (1983) は、数概念の発達の視点で、幼児の数の構造は心的数直線 (mental number line) として表象されていると述べている。即ち、ある数と次の数の間は一つずつ大きくなるという規則的な関係でつながっており、特異性のない構造である。Ashcraft & Battaglia (1978)、Groen & Parkman (1972)、Groen & Resnick (1977)、Siegler & Shrager (1984) なども心的数直線を仮定している。

Yoshida & Kuriyama (1986)、河井・後藤 (1987)、栗山・吉田 (1988, 1995)、後藤 (1999a) などはこれに異を唱えた。Yoshida & Kuriyama (1986) は、幼児に数の合成や分解を行わせる課題において、5までは数唱なしに一気に指を広げられることから、1から5までを特異数とする表象構造になっていると考えた。その後栗山・吉田 (1988) は、幼児にAからBまでの部分的な数唱課題を行わせたところ、Bが5の場合のみ正しく数唱を停止することができた。これより、1から5ではなく、5そのものが特異数として表象している可能性があると修正した。たし算において10が特異数となっていることを示した河井・後藤 (1987) は、一桁たし算の被加数、加数に5を含む問題が含まない問題よりも反応時間は小さいことから、更に5もたし算の計算を容易にする特異な数であると指摘した。栗山・吉田 (1995) は、小学校1・4年生を対象とした一桁たし算の課題において、Groen & Parkman (1972) のミンモデル (min model) を用いて反応時間を分析し、被加数や加数に5を含む問題の反応時間が小さいことから5が特異数として表象されていることを示した。後藤 (1999a) では、心的ひき算の減数や答が5になる問題の反応時間が小さいことから、ひき算においても5を特異数として表象している影響が見られることを示した。以上より、幼児、児童の異なった発達期の子どもに共通して5が特異数として表象されていること、数唱、たし算、ひき算のどの課題においてもその影響を受けていることが明らかになった。

一方、かけ算九九を課題とした研究では、波多野 (1934) が Clapp (1924) の報告した難易順を基に、九九の心理と指導と題して先駆的な考察を行った。Washburne & Vogel (1928) も難易順を示した後、Clapp (1924) の結果と比較している。しかし、これらは相対的な難易差を扱っただけに留まっている。

より詳細な難易に関わる分析、認知心理学的な研究は近年になって行われるようになった。Stazyk, Ashcraft & Hamann (1982) は、大学生を対象として反応時間と誤答率を測定したところ、被乗数、乗数が同数の場合と5を含む場合を除き、被乗数や乗数が大きくなるに従ってそれらは増加することを見出した。Campbell & Graham (1985)、Siegler (1988)、Cooney, Swanson & Ladd (1988) は小学生の解答内容から誤答分析を行い、誤答の約半数は九九表内での誤り (table error) であることを指摘した。table errorとは、提示された問題に対して不正確な回答をしているが、被乗数、乗数の何れかは正しいものである。例えば、4×8を24と回答した場合、4×6＝24とは被乗数4が、3×8＝24とは乗数8が一致している。Miller & Paredes (1990) も小学生、及び大人の誤答分析を行った。3×7＝10のように、たし算としては正しいがかけ算としては誤りである回答について、既に存在する知識が操作上の混乱を来したことによる誤答 (operation confusion error) であると解釈した。更にSiegler (1988) は、たし算を繰り返すストラテジー (例えば、2×4は2を4回加える。) の存在を主張し、被乗数を加える回数が少ない、あるいは多いために誤りが生じることを指摘した。また、被乗数とびにカウントするストラテジー (例えば、2×4は、2・4・6・8と計数する。) も存在するとし、数え不足や数え過ぎが誤答の源であるとした。

認知モデルを想定した研究もいくつか報告されている。Thomas (1963) は、かけ算九九 (PxQ=R) の難しさがlog (P+Q+R) の対数式に従うとした。Parkman (1972) は、一桁たし算に関する先行研究 (Parkman & Groen, 1971: Groen & Parkman, 1972) を参考に、大学生を対象として乗数と被乗数の最小値、最大値、和、差、Thomasの対数式の観点から分析を行い、反応時間は最小値の一次関数に従うことなどを明らかにした。

ところで、我が国のかけ算九九学習は、言語を介して問題と答を一まとめにして符号化 (情報処理モデルにおける用語) する点で他国と比して独自性を有している。学習方法が根本から異なる以上、難しさの要因、誤答傾向、発達過程、認知構造など、学習者の状況は異なる可能性がある。例えば、Ilg & Ames (1951)、Cooney, Swanson & Ladd (1988)、Siegler (1988)、Miller & Paredes (1990)、Cooney & Ladd (1992) で共通して指摘されているのは、初期に獲得するかけ算の技術はたし算や計数に大きく依存することであるが、我が国における学習方法からはたし算や計数を用いて計算しているとは予想しがたく、事実そのようなストラテジーを使用しているとの報告は現在のところ見当たらない。従って、上記の研究結果をそのまま我が国の子どもの実態として当てはめるのは危険である。

そこで我が国のかけ算九九に関する心理学的研究を概観してみると、湊 (1978) は、かけ算九九の誤答率に関する6つの研究をまとめ、被乗数、乗数が2～9の問題計64問について困難度を3段階に分類した。河井・篠田 (1988) は小学校3・4年生を一緒にした反応時間を用いて難易順を表した。更に、被乗数、乗数の組み合わせの違いから生じる難易構造を検討した。後藤 (1991) は、小学校3・4年生を対象としてかけ算九九の難易に影響する要因を反応時間から分析し、被乗数、乗数の大きさ、同数か否かなどが難易と関わっていることを指摘した。以上は、発達段階の異なる対象の結果を込みにして扱っており、発達差の視点が欠落している。この点、後藤 (1999b) は、小学校3・4年生を対象とした誤答内容の質的分析に量的分析を加え誤答要因を検討した結果、被乗数、乗数に0、1を含む問題、及びCampbell & Graham (1985)、Siegler (1988)、Cooney, Swanson & Ladd (1988) で示されたtable errorにおいて両学年に発達差があることを明らかにした。

かけ算九九を課題とした数の表象に関しては、後藤 (1999c) が3・4年生の反応時間を測定し、3年生は0が、4年生は0、1が特異数として表象されていることを示しているのみである。これは数唱、たし算、ひき算を課題とした場合には見られなかったものであり、かけ算特有の現象と推測される。5については、前述したStazyk, Ashcraft & Hamann (1982) が大学生の反応時間と誤答率を基に、被乗数、または乗数5を含む問題に特異な傾向があることを見出した。しかし、この結果から、学習方法の異なる我が国の子どもにおいてもそのまま5が特異数となっているとは言い切れない。

そこで、本研究の第1目的は、我が国のかけ算九九学習を通じて、0、1だけでなく5についても児童の発達段階で特異数として表象されているかを明確にすることである。第2目的は、学習直後の小学校3年生と、かけ算の筆算の学習を終了してよりかけ算九九に習熟したと思われる小学校4年生とを比較して、その発達的な差異について検討することである。

Ⅱ 方　法

1. 被験者

公立小学校３年生36名、４年生32名の計68名。

2. 材料

０～９の組み合わせからなる一桁二項のかけ算九九問題、計100問を用いた。Parkman (1972) などでは再認課題が用いられた。しかし、本研究では、日常生活での自然な場面に近い再生課題を用いた。

3. 装置

問題の提示、測定時間と回答内容の記録にはパーソナル・コンピュータを使用した。ディスプレイの中央に横58mm×縦22mmの長方形を描き、問題はその中に〔Ａ×Ｂ〕の形で水平に提示した。被験者からディスプレイまでは、被験者の見やすい距離 (15～50cm) を選択させた。

4. 手続き

実験に先立ち、被験者全員に次の事項を教示した。

① 実験はかけ算九九の難易を調べるために行うこと。
② 答えるまでの時間を調べるからできるだけ速く、正しく答えること。
③ 実験は一人ずつ行うこと。
④ 100題のかけ算九九がディスプレイに次々と現れるので答が分かってからその答を速やかに言うこと。
⑤ 答は実験者がコンピュータに入力すること。
⑥ 間違っても気にしないで次の問題を行うこと。
⑦ もし答が分からないときは、「分からない」と言うこと。
⑧ 問題の中に〔０〕という数字があればそれは〔ゼロ〕であるということ。
⑨ 個人の記録が人に知らされることはないこと。

実験は被験者の学校の隔離された部屋で個別に実施された。実験者は被験者を装置の前に座らせてから軽い会話により被験者の緊張を取り除き、その後実験が実施された。

コンピュータの操作は実験者によって行われた。実験者の合図後、実験者の操作によりディスプレイ上に問題が提示され、被験者が回答するまで提示されたままであった。被験者には、計算終了後速やかに回答するよう教示してあるため、実験者は被験者が回答を始めたと同時にキーボードの一定のキーを押し、ディスプレイ上から問題を消した。コンピュータには、問題が提示されてから実験者が一定のキーを押すまでの時間（反応時間）を測定させて自動的に記録させた。実験者は、実験に先立ち充分に練習を重ね、習熟してから実験に臨んだ。問題の提示順は被験者ごとにランダムであった。

Ⅲ 結　果

1. 反応時間の扱い

Parkman (1972) によると、反応時間測定の手続きには次の４段階があるとされている。

① 刺激を与える段階
② 計算する段階
③ 口頭する段階
④ 実験者が反応する段階

①については使用したコンピュータにより同一時間で統制されている。③については口頭の速度に個人差はありうるが、それは個人内で一定の傾向と考えられ、全ての被験者はかけ算九九全100問に回答しているため歪んだ結果をもたらすとは考えられない。④については、実験者は充分な練習により操作が習熟しているが、仮に反応ごとに微妙な誤差が生じたとしても、被験者の数によって相殺されると考えられる。

従って、測定した時間の差は②の時間差のみを表していると考えられ、本研究での測定時間は計算に要した時間の差を示す反応時間と見なす。

全被験者の内、分からないと回答した問題のある被験者は、３年生10名、４年生6名であった。これらの被験者は、長期記憶内に答が保存されていないため、その検索には、保存されている場合以上に時間を要していることが予想されるため除外し、３年生26名、４年生26名を反応時間の分析の対象とした。

また、全問題における３年生26名の平均値1886 msec、標準偏差1019msec、４年生26名は平均値1278msec、標準偏差497msecであった。学年差、個人差が大きかったため、分析に際しては元のデータの常用対数変換値を用いることにした。なお、表、図については実測値を用いた。

2. 反応時間の分析

Krueger & Hallford (1984) は被加数や加数

表1　被乗数別の反応時間・標準偏差 (msec)

被乗数	3年生 反応時間	3年生 標準偏差	4年生 反応時間	4年生 標準偏差
0	1116	443	755	264
1	1437	505	964	330
2	1842	1211	1250	458
3	1711	759	1217	392
4	2124	1392	1406	595
5	1767	945	1228	447
6	1957	1435	1349	464
7	2090	996	1403	449
8	1922	797	1425	495
9	1925	747	1456	514
平均	1789	1019	1245	497

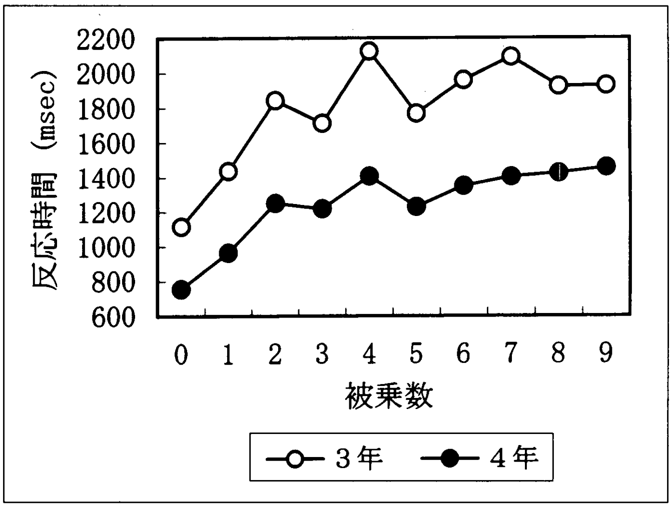

図1　被乗数別の反応時間

表2　乗数別の反応時間・標準偏差 (msec)

乗数	3年生 反応時間	3年生 標準偏差	4年生 反応時間	4年生 標準偏差
0	1234	358	979	200
1	1376	419	1051	345
2	1683	879	1155	435
3	1937	1480	1250	430
4	1944	1053	1339	499
5	1685	741	1149	396
6	2007	1330	1331	595
7	2065	1101	1417	583
8	2076	986	1379	547
9	1886	883	1405	579
平均	1789	1019	1245	497

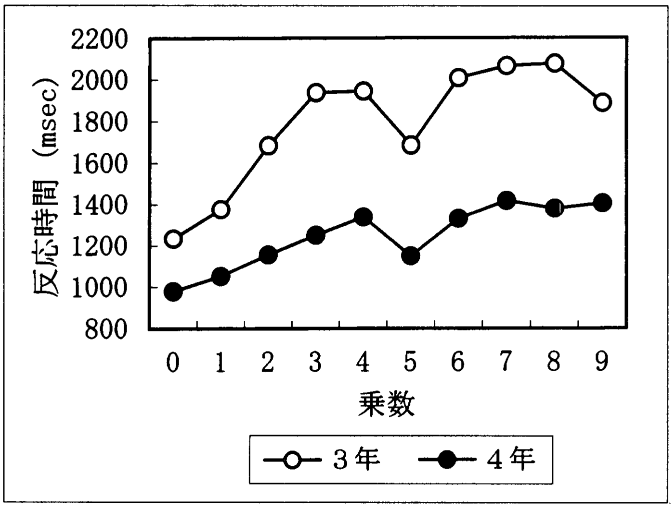

図2　乗数別の反応時間

に10を含む問題は含まない問題より反応時間が小さいことから10を特異数として位置づけた。栗山・吉田 (1995)、後藤 (1999a, c) なども同様である。現在、反応時間の大小から特異数を探る手法は定番となっている。従って、かけ算九九において5が特異数であるならば、被乗数や被乗数に5を含む問題は他の数を含む問題よりも反応時間は小さいことが予想される。

学年、被乗数別に反応時間を分類して平均を算出した。それらに標準偏差を加えて表1に示した。また、両学年の被乗数別反応時間を図1に示した。更に、学年、乗数別に反応時間を分類して平均を算出した。それらに標準偏差を加えて表2に示した。また、両学年の乗数別反応時間を図2に示した。

被乗数の関数としてみた反応時間との相関係数は3年生0.779、4年生0.827であった。乗数の関数としてみた反応時間との相関係数は3年生0.829、4年生0.884であった。これより、被乗数や乗数が大きくなるに従って反応時間も大きくなることがうかがえる。

そこで、被乗数別に分類した反応時間について、2 (学年：3年と4年) ×10 (被乗数：0~9) の分散分析を行ったところ、学年の主効果 ($F(1, 50)=1171.785, p<.01$)、被乗数の主効果 ($F(9, 450)=167.987, p<.01$)、学年と被乗数の交互作用 ($F(9, 450)=1.945, p<.05$) が有意であった。学年と被乗数の交互作用が有意であったので、被乗数における学年の単純主効果について検定したところ、全ての被乗数において1%水準で有意であった。また、学年における被乗数の単純主効果について検定した結果、両学年とも1%水準で有

意であった。そこで多重比較を行ったところ、3年生は被乗数0と1～9、1と2～9、2と4・7・9、3と4・6～9、4と5、5と7～9、6と7が1％水準、2と8、5と6、7と8が5％水準で有意であった。4年生は0と1～9、1と2～9、2と4・6～9、3と4・6～9、4と5、5と6～9、6と9が1％水準、4と9が5％水準で有意であった。

これらから、3年生では被乗数0より1～9、1より2～9、2より4・7～9、3より4・6～9、5より4・6～9、6・8より7が反応時間は大きいことが示された。4年生では、0より0～9、1より2～9、2より4・6～9、3より4・6～9、5より4・6～9、4・6より9が反応時間は大きいことが示された。

次に、乗数別に分類した問題について、2（学年：3年と4年）×10（乗数：0～9）の分散分析を行ったところ、学年の主効果（$F(1, 50) = 1008.521$, $p < .01$）、乗数の主効果（$F(9, 450) = 63.506$, $p < .01$）、学年と乗数の交互作用（$F(9, 450) = 2.558$, $p < .01$）が有意であった。学年と乗数の交互作用が有意であったので、乗数における学年の単純主効果について検定したところ、全ての乗数において1％水準で有意であった。また、学年における乗数の単純主効果について検定した結果、両学年とも1％水準で有意であった。そこで多重比較を行ったところ、3年生は乗数0と1～9、1と2～9、2と3・4・6～9、3と8、4と5、5と6～9が1％水準、3と5・7、4と8、7と9、8と9が5％水準で有意であった。4年生は乗数0と2～9、1と2～9、2と3・4・6～9、3と5・7～9、4と5、5と6～9が1％水準、6と7・9が5％水準で有意であった。

これらから、3年生は乗数0より1～9、1より2～9、2と3・4・6～9、3より7・8、4より8、5より3・4・6～9、9より7・8が反応時間は大きいことが示された。4年生は、0より2～9、1より2～9、2より3・4・6～9、3と7～9、5より3・4・6～9、6より7・9が反応時間は大きいことが示された。

Ⅳ 考　　察

Parkman（1972）によると、かけ算九九は記憶の検索かアルゴリズム的な計算によるものであるが反応時間だけでは明らかにできないとされている。かけ算九九をアルゴリズム的な計算で行うとすれば、Siegler（1988）の指摘したたし算を繰り返すストラテジーが考えられる。即ち、乗数個の被乗数を加算することになろう。かけ算九九を全てたし算によって計算すれば、1問に付き平均4.5個の数を加算することなる。河井・後藤（1987）によると、1問の一桁たし算の反応時間は、全100問を平均すると1・2年生込みにして3160msecであった。本研究における被験者が1問のかけ算九九に要した平均反応時間は3年生1886msec、4年生1278msecであった。学年差を考慮したとしても、4.5個の数を加算する時間としてはあまりにも短すぎ、アルゴリズム的な計算を行っている可能性は低いと考えられる。実際、被験者の学校でも言語を介して問題と答を一まとめにして符号化するような我が国特有の学習方法が選択されていた。これらから、被験者の反応時間は長期記憶からの検索に費やされた時間と考えた方が妥当であろう。そうなると、本研究は、大学生を対象として行ったStazyk, Ashcraft & Hamann（1982）の結果とは異質であり、学習方法の異なる我が国特有の、しかも児童という発達段階の結果として意味があるといえる。

被乗数の関数としてみた反応時間との相関係数は3年生0.779、4年生0.827、乗数の関数としてみた反応時間との相関係数は3年生0.829、4年生0.884であった。これは、たし算におけるネットワークモデル（memory network model）（Ashcraft & Battaglia, 1978; Ashcraft, 1982; Kaye, Post, Hall & Dineen, 1986）、連合分布モデル（distribution of association）（Siegler & Sharager, 1984; Siegler, 1987）と同様、かけ算九九においても答の数が大きくなるほど反応時間が増加するサイズ効果を予想させる。分散分析の結果からも概ねその傾向は見られるが、唯一被乗数や乗数が5の場合のみ異なった。両学年とも被乗数5は4・6～9より反応時間が小さく、2・3とは差がなかった。また、両学年とも乗数5は3・4・6～9より反応時間が小さく、2とは差がなかった。これより、後藤（1999c）が特異数として明らかにした0、または1を含む問題を除けば、被乗数、あるいは乗数が5の問題は最も反応時間が小さい結果となった。こうして、3・4年生とも5が特異数として表象されていることが示され

た。

それでは、どうして5を含む問題の反応時間が小さかったのであろうか。どの教科書においても、かけ算九九の学習は5の段から始まる。従って、5の段は最も早期に学習するため、その後のリハーサル回数が最も多い段であると予想される。いくつかの研究が、リハーサルやその回数が再生や長期記憶への転送に効果的であることを指摘している（Hellyer, 1962; Rundus & Atkinson, 1970）。あるいは、系列位置の効果も考えられる。Sumby（1963）は、系列化された前部の単語は出現頻度が高いため長期記憶への転送に効果があることを示している。しかし、何れにせよ転送に効果的であっても検索時間が速くなるとは限らない。仮に、リハーサルや系列位置効果が再生を促進したとしても、乗数5の反応時間が小さかったことについての説明が不可能である。乗数5の問題は、どの段にも含まれているからである。

また、水道方式を用いている学校では5を単位として指導しているため、公的な教育の中で5が特異数となる可能性がある。しかし、本研究で実験した学校では水道方式を取り入れておらず、かけ算以前のたし算などの単元においても特に5を基にした算数指導は行っていなく、公的な教育の影響とは考えられない。

むしろ、Resnick & Singer（1993）が算数のかなりの知識は日常の実際的な生活経験から生じていると指摘しているように、河井・後藤（1987）、栗山・吉田（1995）の心的たし算、後藤（1999a）の心的ひき算を課題とした研究でも述べられている通り、指が5本であるという外的な構造の影響と考えた方が妥当であろう。5は指の構造と一致しており、幼児期からの日常生活で指を使用することにより慣れ親しんでいった数と考えられる。それ故、5は理解しやすく、扱いやすい数になったと思われる。

それでは、外的な構造に影響された5の数の構造は内的な構造と言えるであろうか。栗山・吉田（1988）では、外的な構造に依存しない数唱課題を用いて5が特異数として表象されていることを見出した。河井・後藤（1987）や後藤（1999a）でも、反応時間という指に依存しない課題で結果を見出している。同様に、本研究の結果も反応時間により見出されたものであり、更に、前述したように記憶の検索により解答したとすると、指を用いたとは考えにくい。これらより、数唱、たし算、ひき算課題において見られた5という特異数が、かけ算九九を行う際にも依然として内的に表象されており、その影響を受けていることが示唆される。Piaget（1952）が外的装置を用いた思考過程は次第に内的装置として処理されるようになると述べていることからすると、指という外的構造を用いることにより、次第に内的な表象構造へと移行したと考えられる。かけ算に言及していないものの、日常生活で幼児が行う方略が就学後の子どものたし算の中心的な役割を果たしているというGelman & Gallistel（1978）の考えは、かけ算九九においても有効であったことが本研究から示されたといえよう。

また、被乗数や乗数が5であるかけ算九九の答は、1の位の数字が0か5に限定されるという特異性を有している。即ち、答は全て5の倍数であり、たし算やひき算と異なり、被乗数や乗数が5である特異性の影響は、問題と答で同時に、かつ二重に受けていることとなる。加えて、答によっては10の倍数となっている場合もあり、Siegler & Robinson（1982）、河井・後藤（1987）、後藤（1999a）などで幼児や小学校低学年において明らかにされた特異数10の影響が付加される場合もあろう。こうした特徴は、被乗数や乗数が5であるかけ算九九の特異性を強固にしたのみならず、発達的側面へも関与したと思われる。

栗山・吉田（1995）は、心的たし算において特異数5に発達差を見出した。小学校1年生では、被加数や加数に5を含む全ての心的たし算において、もう一方の数に関わらず、5を含むたし算の反応時間が含まない場合の反応時間より小さかった。従って、幼児期からの特異数である5の影響を強く受けていたことになる。しかし、4年生において、そのような結果はもう一方の数が2である場合を除いて見出せなかった。十進法制の公的教育が行われていく中で、次第に十進法システムへ統合していったと推察している。更に、一部の問題に5の影響が見られることから、十進法制の教育を4年間受けた後も、依然として5の特異数の構造は存在していると加えている。

一方、本研究では異なった結果が得られた。3・4年生間で栗山・吉田（1995）のような発達的変化は見られなかった。1・4年生を比較した栗山・吉田（1995）とは比較対象が異なる。学校での学

習が終了している児童が対象となることを前提とした場合、課題がかけ算九九であったために最も低い学年でも3年生とし、栗山・吉田（1995）が選択した4年生と比較したが、年齢差1年であったことも差がなかった要因として考えられる。しかし、それよりも、たし算とかけ算では演算に付随する性質が異なる。かけ算の場合、答は被乗数、または乗数の倍数となる。栗山・吉田（1995）の結果では4年生になり十進法制の学習が特異数5に逆風を吹かせたとも考えられるが、かけ算では前述したように被乗数や乗数が5である問題の答は10の倍数となる場合があり、十進法制の学習はたし算と異なり特異数5において逆風にはなり得なかったのであろう。加えて、かけ算九九では、前述した5を含む問題は、被乗数や乗数が5であると同時に、答は全て5の倍数であるという二重の性質があり、4年生においても依然としてその強い影響が存在していた点でたし算とは異なると思われる。

今後の課題としては以下の点であろう。かけ算九九における5の表象構造が4年生以降に発達的変化を見せるか、見せるとすればどの時点であろうか。四則演算では唯一未確認のわり算、分数や文章題などにおいても5が特異数として表象されているであろうか、今後はこうした観点からの研究も必要であろう。

引用文献

Ashcraft, M. H. 1982 The development of mental arithmetic: A chronometric approach. Developmental Review, 2, 213-236.

Ashcraft, M. H., & Battaglia, J. 1978 Evedence for retrieval and decision processes in mental addition. Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory, 4, 527-538.

Campbell, J. I. D., & Graham, D. J. 1985 Mental multiplication skill: Structure, process, and acquisition. Canadian Journal of Psychology, 39(2), 338-366.

Clapp, F. L. 1924 The number combinations: Their relative difficulty and the frequency of their appearance in textbook. Bureau of Educational Research, Bulletin, Nos 1 and 2 Wisconsin University, 20-126.

Cooney, J. B., & Ladd, S.F. 1992 The influence of verbal protocol methods on children's mental computation. Learning and Individual Differences, 4, 237-257.

Cooney, J. B., Swanson, H. L., & Ladd, S. F. 1988 Acquisition of mental multiplication skill: Evidence for the transition between counting and retrieval strategies. Cognition and Instruction, 5, 323-345.

Gelman, R. & Gallistel, C. R. 1978 The child understanding of number. Cambridge, M. A.: Harvard University Press.

後藤　聡　1991　かけ算九九の難易に影響を及ぼす要因の分析　天使女子短期大学大学紀要, 12, 29-40.

後藤　聡　1999a　心的ひき算の難易と数表象の構造　天使女子短期大学紀要, 20, 1-9.

後藤　聡　1999b　かけ算九九誤答要因の分析　日本科学教育学会第23回年会論文集, 395-396.

後藤　聡　1999c　かけ算九九における0と1の表象　日本教育心理学会第41回総会発表論文集, 367.

Greeno, J. G., Riley, M. S., & Gelman, R. 1984 Conceptual competence and children's counting. Cognitive Psychology, 16, 94-143.

Groen, G. J., & Parkman, J. M. 1972 A chronometric analysis of simple addition. Psychological Review, 79, 329-343.

Groen, G. J., & Resnick, L. B. 1988 Can preschool children invent addition algorithms? Journal of Educational Psychology, 69, 645-652.

波多野完治　1937　算術の指導心理　賢文館

Hellyer, S. 1962 Frequency of stimulus presentation and short-term decrement in recall. Journal of Experimental Psychology, 64, 650.

河井芳文・後藤　聡　1987　児童における一桁の足し算の難易の構造について　東京学芸大学紀要，第1部門，教育科学，第38集，99-107.

河井芳文・篠田達也　1988　かけ算九九の難易構造　－難易の構造化と指導の適正化－　日本教育心理学会第30回大会論文集，680-681.

Kaye, D. B., Post, T. A., Hall, V. C., & Dineen, J. T. 1986 The emergence of information retrieval strategies in numerical cognition: A dvelopmental study. Cognition and Instruction, 3, 137-166.

Krueger, L. E., & Hallford, E. W. 1984 Why 2＋2＝5 looks so wrong: On the odd-even rule in sum verification. Memory & Cognition, 12, 171-180.

栗山和広・吉田甫 1995 心的加算における数の表象構造について 教育心理学研究, 43, 402-410.

Ilg, F., & Ames, L. B. 1951 Developmental trends in arithmetic: Gesell institute of child development. The Journal of Genetic Psychology, 79, 3-28.

Miller, K. F., & Paredes, D. R. 1990 Starting to add worse: Effects of learning to multiply on children's addition. Cognition, 37, 213-242.

湊 三郎 1978 乗法九九の誤答率に関する調査結果 東北数学教育学会年報, 9, 3-10.

Parkman, J. M. 1972 Temporal aspects of simple multiplication and comparison. Journal of Experimental Psychology, 95, 2, 437-444.

Parkman, J. M., & Groen, G. J. 1971 Temporal aspects of simple addition and comparison. Journal of Experimental Psychology, 89, 2, 335-342.

Piaget, J. 1952 The child's conception of number. Norton.

Resnick, L. B. 1983 A developmental theory of number understanding. In H. B. Ginsberg (Ed.), The development of mathematical thinking. Academic Press.

Resnick, L. B., & Singer, J. A. 1993 Protoquantitative origins of ratio reasoning. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T.A. Romberg (Eds.), Rational number: An integration of research. Hillsdale, NJ: LEA.

Rundus, D., & Atkinson, R. C. 1970 Rehearsal processes in free-recall: A procedure for direct observation. Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior, 9, 99-105.

Siegler, R. S. 1987 The perils of averaging data over strategies: An example from children's addition. Journal of Experimental Psychology: General, 116(3), 250-264.

Siegler, R.S. 1988 Strategy choices procedures and the development of multiplication skill. Journal of Experimental Psychology: General, 117, 258-275.

Siegler, R. S., & Robinson, M. 1982 The development of numerical understanding. In H. W. Reese & L. P. Lipsett (Eds.), Advances in child development and behavior. Vol.16. New York.

Siegler, R. S., & Sharager, J. 1984 Strategy choices in addition and subtraction: How do children know what to do ? In C. Sophian (Ed.), Origins of cognitive skills. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Stazyk, E.H., Ashcraft, M.H., & Hamann, M.S. 1982 A network approach to mental multiplication. Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 8(4), 320-335.

Sumby, W. H. 1963 Word frequency and serial position effects. Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior, 1, 443-450.

Thomas, H. B. G. 1963 Communication hypothesis of calculation. Quarterly Journal of Experimental Psychology, 15, 173-191.

Washburne, C., & Vogel, M. 1928 Are any number combinations inherently difficult? Journal of Educational Research, 17(4), 235-254.

Yoshida, H. & Kuriyama, K. 1986 The numbers 1 to 5 in development of children's number concepts. Journal of Experimental Psychology, 41, 251-266.